II Mock Olimpiada Matemática Española PErA

Enunciados y Soluciones

15 y 16 de marzo de 2025

Índice

1. Enunciados

Problema 1. Sea S un conjunto finito de 3 o más puntos del plano, de manera que no hay tres puntos de S alineados. Demuestra que existe un polígono sin autointersecciones cuyos vértices son exactamente los puntos de S.

Problema 2. Sea m un entero positivo. Decimos que un entero x es m-bueno si a^m divide a x para algún entero $a > 1$. Diremos que un entero x es m-malo si no es m-bueno.

(a) ¿Es verdad que para todo $n > 0$ existen n enteros m-malos consecutivos?

(b) ¿Es verdad que para todo $n > 0$ existen n enteros m-buenos consecutivos?

Problema 3. Sea ABC un triángulo equilátero con circuncentro O. Sean X e Y dos puntos en los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que $\angle XOY = 60°$. Si T es la reflexión de O respecto la recta XY, demuestra que las rectas BT y OY son paralelas.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno. Sean B_1 y B_2 puntos sobre las semirrectas BC y BA tales que $BB_1 = BB_2 = AC$. Similarmente, sean C_1 y C_2 puntos sobre las semirrectas CB y CA tales que $CC_1 = CC_2 = AB$. Demuestra que si B_1B_2 y C_1C_2 intersecan en K, entonces AK es paralela a BC.

Problema 5. Arándano tiene un tablero $n \times n$, donde $n \geq 1$ es entero. Arándano ha llenado el tablero usando n rectángulos de lados enteros sin solaparse, de manera que todo el tablero queda cubierto. Luego, Banana ha anotado, para cada uno de los n rectángulos, la longitud de su diagonal. Cuál es, en función de n, el valor más grande que puede tomar su suma?

Problema 6. En Macedonia del norte hay n estaciones de tren. Hay m pares distintos de estaciones conectados por vías de tren, y sabes que se puede ir de cualquier estación a cualquier otra en tren.
Marc es el encargado de dirigir la circulación de trenes hoy. Para cada par de estaciones conectadas A y B, debe elegir entre mandar un tren de A a B o mandar un tren de B a A. Así pues, a lo largo del día, entre cada par de estaciones conectadas por una vía viajará un tren en un sentido y ninguno en el otro.
Sea N el número de formas que tiene Marc de asignar los trenes de forma que, al acabar el día, de cada estación haya partido un número par de trenes. Demuestra que N solo depende de m y n, y calcula su valor.

2. Problema 1

Sea S un conjunto finito de 3 o más puntos del plano, de manera que no hay tres puntos de S alineados. Demuestra que existe un polígono sin autointersecciones cuyos vértices son exactamente los puntos de S.

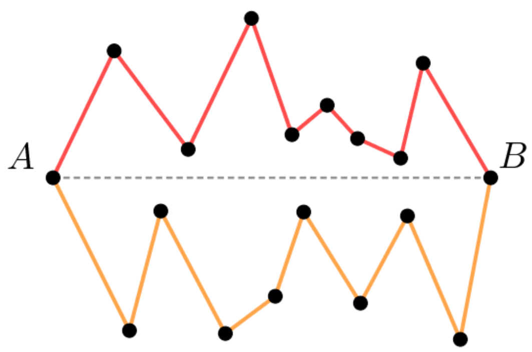
Propuesto por Roger Lidón.

Presentamos seis soluciones distintas. Una usa un argumento de minimalidad (solución 2), otra usa inducción (solución 6), y el resto usan construcciones explícitas.

Solución 1. Fijamos los ejes de coordenadas de forma que ninguna recta entre dos puntos de S es paralela al eje x o al eje y. Ahora, elejimos A como el punto de menor coordenada x, y B como el punto de mayor coordenada x.

Llamamos S^+ al subconjunto de puntos de S que quedan a un lado de la recta AB, y S^- a los puntos de S que quedan al otro lado de la recta AB. Consideramos que A y B están a la vez en S^+ i en S^-. Ahora, creamos la poligonal $\mathcal{P}^+$ formada por los puntos de S^+, que va de A a B y ordena los puntos de S^+ de menor a mayor coordenada X. (Nótese que si no hay ningún punto estrictamente por encima de AB, $\mathcal{P}^+$ es el segmento AB). Similarmente, creamos $\mathcal{P}^-$ ordenando los puntos de S^- de menor a mayor coordenada X. Finalmente, definimos $\mathcal{P}$ como la unión de $\mathcal{P}^+$ con $\mathcal{P}^-$.

Es fácil ver que ni $\mathcal{P}^+$ ni $\mathcal{P}^-$ autointersecan, y como los puntos de S^+ tienen coordenada Y estrictamente mayor a los de S^- excepto por A, B, el polígono final tampoco se autointersecará. $\square$



Solución 2. Sea $\mathcal{P}$ la cadena poligonal cerrada de longitud total más pequeña cuyos vértices son exactamente los puntos de S. Una cadena poligonal es un polígono al que permitimos autointersecarse. Si hay varias cadenas candidatas, elegimos una cualquiera. Demostraremos que $\mathcal{P}$ no autointerseca. Supón por contradicción que A, B, C, D son puntos distintos de S de forma que AB y CD son aristas de $\mathcal{P}$ y se cortan.

Claim. $AC + BD$ y $AD + BC$ son estrictamente menores que $AB + CD$.

Proof. Sea E la intersección de AB y CD. Por desigualdad triangular en los triángulos ACE y BDE, tenemos que

$$AC + BD < AE + CE + BE + DE = AB + CD.$$

Similarmente, por desigualdad triangular sobre ADE y BCE,

$$AD + BC < AE + DE + BE + CE = AB + CD.$$

No se puede dar la igualdad en ningún caso, ya que como S no tiene tres puntos colineales, los triángulos donde hemos aplicado desigualdad triangular no son degenerados. ■

Nota que los puntos A, B, C, D solo pueden aparecer en esencialmente dos órdenes posibles alrededor de $\mathcal{P}$: Empezando en A, yendo hacia B y siguiendo $\mathcal{P}$ o bien encontramos los puntos A, B, C, D en ese orden, o en el orden A, B, D, C. En el primer caso, podemos eliminar AB y CD de $\mathcal{P}$, y añadir AC y BD. Esto da una cadena poligonal cerrada válida, y de menor longitud total, contradiciendo que $\mathcal{P}$ era de longitud mínima. El segundo caso sigue similarmente, substituyendo AB y CD por AD y BC. □

Solución 3. Sea $A_0 \in S$ un punto cualquiera. Ordenamos el resto de puntos de S como $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ en función de su ángulo alrededor de A_0. Nuestro claim es que el polígono $\mathcal{P} = A_0A_1A_2 \ldots A_n$ funciona. Esto se ve claro con el siguiente diagrama.

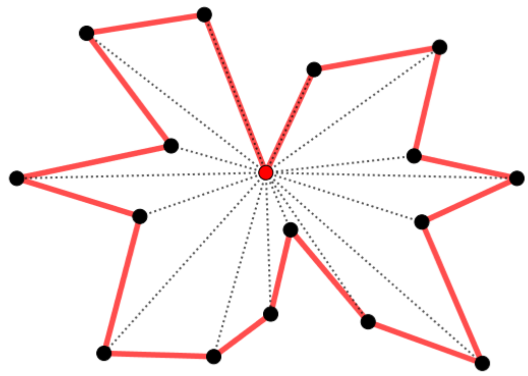
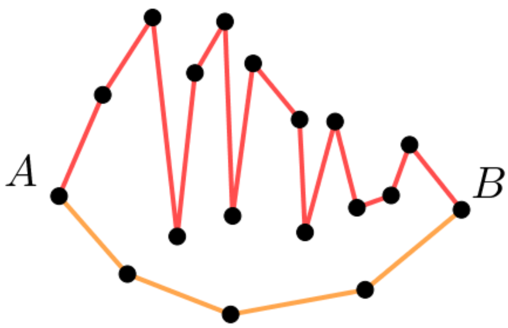


Figura 1: El punto rojo es A_0.

Si $i \geq 1$ entonces A_iA_{i+1} está contenido en el ángulo $\angle A_iA_0A_{i+1}$, por tanto no puede cortarse con ningún otro A_jA_{j+1}. Similarmente, A_0A_{n-1} y A_0A_1 tampoco se cortan con ningún otro lado de $\mathcal{P}$. □

Solución 4. Sea $\mathcal{Q}$ el polígono convexo más pequeño que contiene todos los puntos de S en su frontera o interior, que existe y és único. De hecho, $\mathcal{Q}$ es un polígono cuyos vértices son los puntos "exteriores" de S, es decir, los puntos $A \in S$ para los que existe una recta ℓ pasando por A dejando todo S en el mismo lado de la recta. Este polígono se conoce como la envolvente convexa, o convex hull del conjunto S.

La idea de esta solución se resume en el siguiente diagrama.



Elije dos vértices A y B de $\mathcal{Q}$ tales que son "diametralmente opuestos" en $\mathcal{Q}$, es decir, que todo otro punto de S, proyectado sobre el segmento AB, queda contenido dentro del segmento AB. Podemos hacer esto fijando un eje de coordenadas tal que ninguna recta entre dos puntos de S sea paralela al eje y, y luego tomar A y B como los puntos de menor y mayor coordenada x. Otro modo es escoger A y B como la pareja de puntos más alejados entre sí.

Ahora, tomaremos una línea poligonal $\mathcal{P}_1$ que irá de A hasta B por el perímetro de $\mathcal{Q}$. Esta es la línea poligonal naranja del dibujo. Ahora, considera el conjunto S' de puntos que no están en $\mathcal{P}_1$. Vamos a trazar una línea poligonal $\mathcal{P}_2$ que vaya de A a B pasando por todos los puntos de S'. Esto es la línea poligonal roja del dibujo. Construiremos $\mathcal{P}_2$ haciendo un barrido en escoba: ordenamos los puntos de S' según sus proyecciones sobre la recta AB, y los añadimos en $\mathcal{P}_2$ de izquierda a derecha en orden de la proyección. Ahora podemos considerar el polígono que sale de unir $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, que claramente funciona. $\square$

Solución 5 (sketch). La idea es usar envolventes convexas en cebolla, y partir de eso para construir el polígono. Mientras queden puntos en S, consideraremos la envolvente convexa de los puntos que queden, y eliminaremos esos vértices de S. Esto nos deja todos los puntos de S repartidos entre unos cuantos polígonos convexos, cada uno dentro del anterior.

Los siguientes dos dibujos son el concepto y el ejemplo de como, ahora, se puede conseguir el polígono.

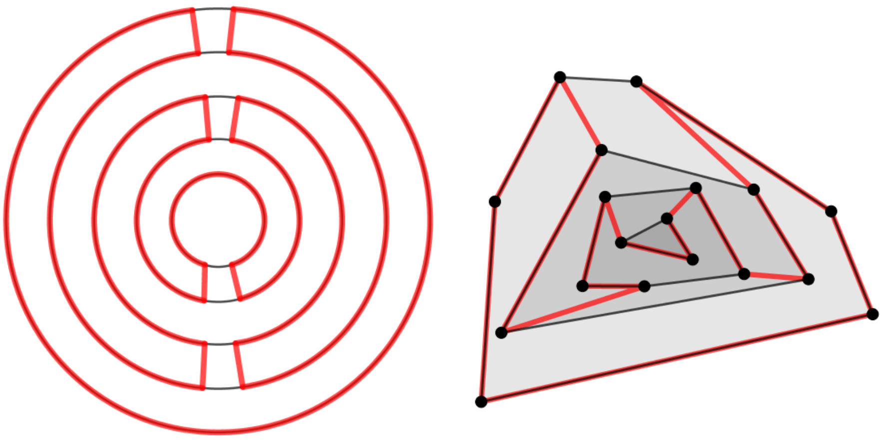


Figura 2: En la izquierda, cada círculo representa una envolvente convexa, y el contorno rojo representa el polígono.

Formalizar esta solución es un poco tedioso, así que no lo vamos a hacer. Total, tenemos otras cinco soluciones. $\square$

Solución 6. Vamos a proceder por inducción sobre el número de puntos en S. Si hay tres puntos, los unimos formando un triángulo y hemos acabado. En caso contrario, escoge un punto P de la envolvente convexa de S.

Si quitamos P de S, tenemos un conjunto de menos puntos, así que por hipótesis de inducción existe un polígono $\mathcal{Q}$ que los contiene como vértices. Ahora tenemos que modificar $\mathcal{Q}$ en otro polígono añadiendo el punto P.

Mirando desde P, vemos que todos los puntos de Q están en el mismo semiplano, ya que P es un punto exterior de S por ser de su envolvente convexa. Así, podemos escoger el de más a la izquierda y llamarlo A_1. Desde P, podemos ver A_1, y solo se empieza a ver uno de los dos segmentos de $\mathcal{Q}$ que contiene A_1, digamos A_1B_1, que puede estar parcialmente obstruido o verse completamente. Si se ve todo, reemplazamos el segmento A_1B_1 por A_1P y PB_1, construyendo así el polígono que buscamos.

En caso contrario, el segmento A_1B_1 está obstruido por otros segmentos, y llamamos A_2 al primer vértice que encontramos mientras, estando en P, giramos la cabeza desde A_1 a B_1. De nuevo, solo se ve uno de los segmentos que involucran A_2, pongamos A_2B_2, y podemos hacer el mismo razonamiento y acabar, o encontrar otro segmento A_3B_3.

Este algoritmo finalmente acaba, ya que todos los puntos A_i definidos son distintos: giramos la cabeza a la derecha cada vez y nunca damos una vuelta entera. La condición de tener P en la envolvente convexa es la que nos impide girar la cabeza indefinidamente y volver a encontrar A_1 otra vez. $\square$

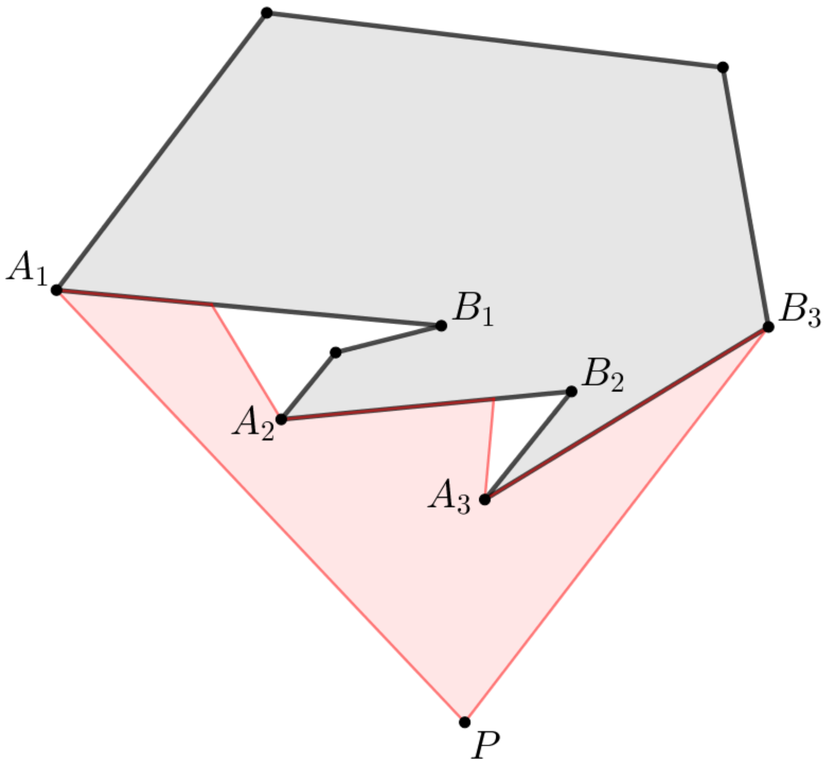


Figura 3: La área roja es visible por P, y en negro se marca $\mathcal{Q}$.

3. Problema 2

Sea m un entero positivo. Decimos que un entero x es m-bueno si a^m divide a x para algún entero $a > 1$. Diremos que un entero x es m-malo si no es m-bueno.

(a) ¿Es verdad que para todo $n > 0$ existen n enteros m-malos consecutivos?

(b) ¿Es verdad que para todo $n > 0$ existen n enteros m-buenos consecutivos?

Propuesto por Paco Esteve.

Solución. Empezamos por ver que el apartado (a) es siempre falso. Es decir, que para cualquier entero positivo m existirá una n tal que cualesquiera n enteros consecutivos tendrán un entero m-bueno. Para eso simplemente debemos escoger $n \geq 2^m$ y darnos cuenta de que entre 2^m enteros consecutivos siempre hay uno divisible por 2^m, lo que acaba la demostración.

Ahora, demostramos que el apartado (b) es siempre cierto. Es decir, que para cualesquiera enteros positivos m y n podemos encontrar n enteros m-buenos consecutivos. Para esto nos construiremos explícitamente un entero positivo x tal que $x+1$, $x+2$, $\ldots$, $x+n$ són m-buenos. Procedemos formalmente de la siguiente manera:

Sean p_1, p_2, $\ldots$, p_n n números primos distintos. Ahora, consideremos el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{p_1^m} \\ x \equiv -2 \pmod{p_2^m} \\ \qquad\vdots \\ x \equiv -i \pmod{p_i^m} \\ \qquad\vdots \\ x \equiv -n \pmod{p_n^m}. \end{cases}$$

Como todos los módulos son coprimos (al ser primos distintos), entonces por el teorema chino de los restos tenemos que el sistema tiene una única solución módulo $p_1^m p_2^m \cdots p_n^m$. Escogemos $x_0 > 0$ cumpliendo esa congruencia. Ahora, esto implica que $p_1^m \mid x_0 + 1$, $p_2^m \mid x_0 + 2$, $\ldots$, $p_n^m \mid x_0 + n$, y que por lo tanto $x_0 + 1$, $x_0 + 2$, $\ldots$, $x_0 + n$ son n enteros m-buenos consecutivos. $\square$

4. Problema 3

Sea ABC un triángulo equilátero con circuncentro O. Sean X e Y dos puntos en los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que $\angle XOY = 60°$. Si T es la reflexión de O respecto la recta XY, demuestra que las rectas BT y OY son paralelas.

Propuesto por Xavi Díaz.

Solución 1. El claim principal es que $\triangle TXY$ y $\triangle TBC$ son semejantes. Observa que como $\angle XTY = 60° = \angle XAY$, tenemos que $XATY$ es cíclico.

Claim. $\triangle TXB$ y $\triangle TYC$ son similares.

Proof. Como $XATY$ es cíclico,

$$\angle TXB = 180° - \angle AXT = 180° - \angle AYT = \angle TYC$$

y $\triangle TXB$ y $\triangle TYC$ tienen dos ángulos iguales. Por tanto, basta con provar que

$$\frac{TX}{XB} \stackrel{?}{=} \frac{TY}{YC} \iff \frac{TX}{TY} = \frac{OX}{OY} \stackrel{?}{=} \frac{XB}{YC}.$$

Observa que como $\angle XOY = 60°$ y $\angle BOC = 120°$, tenemos que $\angle BOX + \angle COY = 180°$. Ahora, por el teorema del seno aplicado dos veces en $\triangle OXB$, y luego dos veces más en $\triangle OYC$, tenemos que

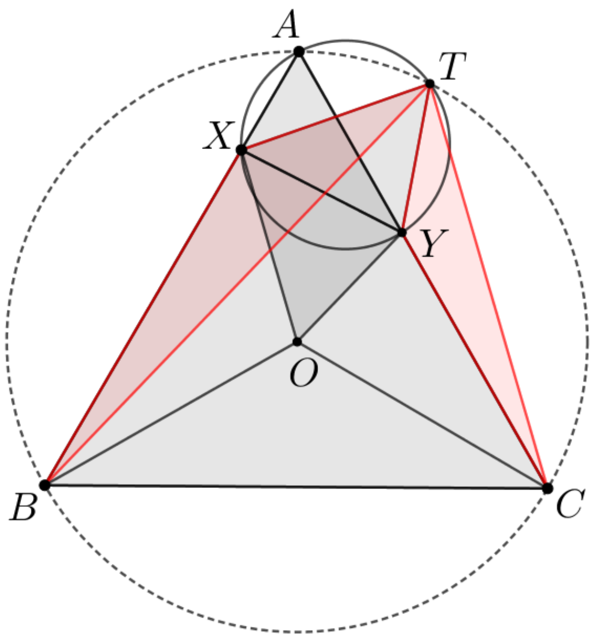
$$\frac{OX}{XB} = \frac{\sin\angle OBX}{\sin\angle BOX} = \frac{\sin(30°)}{\sin\angle(180° - \angle COY)} = \frac{\sin\angle OCY}{\sin\angle COY} = \frac{OY}{YC}.$$

Por tanto, la igualdad buscada queda demostrada, y el claim sigue. ∎

Gracias a la semejanza, tenemos que $\angle XBT = \angle YCT$ y por tanto $ATCB$ es cíclico. En particular, $\triangle TXY$ y $\triangle TBC$ son similares. Ahora se puede acabar moviendo ángulos de forma similar a la solución 1. Por ejemplo, podemos mover

$$\angle OTY = 90° - \angle XYT = 90° - \angle BCT = \angle BTO,$$

implicando que BT es paralela a OY. □



Solución 2. El objetivo de las siguientes conjeturas es demostrar que T es el centro de la rotomotecia que envia XY a BC. Sean D y E las respectivas intersecciones de XO e YO con BC.

Claim 1. Los triángulos $\triangle OXY$ y $\triangle OED$ son congruentes.
Proof. Primero demostraremos que $ODCY$ es un cuadrilátero cíclico. Esto sigue de

$$\angle YCD = 60^\circ = 180^\circ - \angle YOD.$$

Similarmente, $OEBX$ también es cíclico. Además, como CO es la C-bisectriz interior del triángulo $\triangle CYD$, O es el punto medio del arco menor YD del círculo $(ODCY)$ y se tiene la igualdad de distancias $OY = OD$. Similarmente $OX = OE$. Así pues, los triángulos $\triangle OXY$ y $\triangle OED$ comparten el ángulo interior de O, y la distancia de sus lados, así que son congruentes. ■

Claim 2. Los puntos A, B, C y T son concíclicos y su circuncentro es O.
Proof. Sabemos que O es el circuncentro del triángulo $\triangle ABC$, así que demostraremos la igualdad entre distancias $OA = OT$. Definimos $d(X, l)$ como la distancia de un punto X cualquiera a una recta l. Utilizando *Claim 1* sabemos que

$$OT = 2 \cdot d(O, XY) = 2 \cdot d(O, DE) = 2 \cdot d(O, BC) = OA.$$

Demostrando así la conjetura. ■

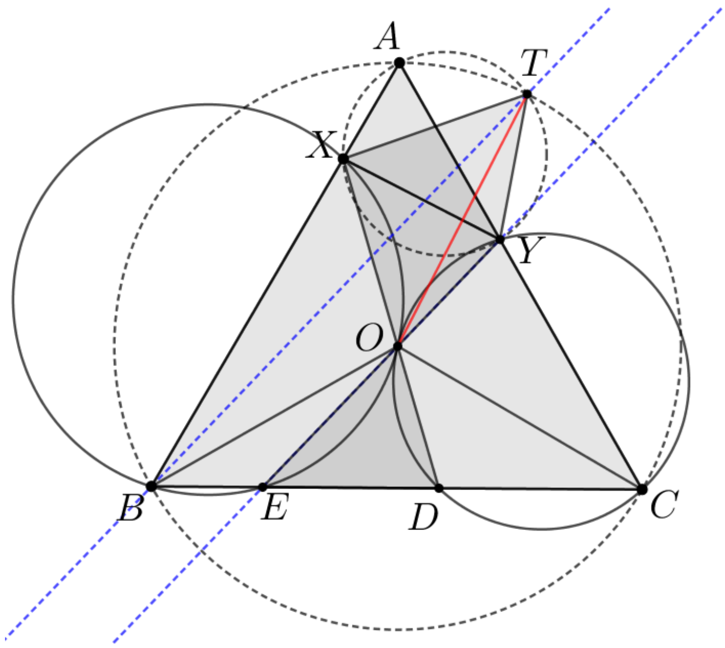
Ahora, queremos encontrar el centro de la rotomotecia que lleva XY a BC. Sabemos que las rectas BX y CY intersecan en A, entonces este centro de rotomotecia se encuentra en la intersección (distinta de A si no son tangentes) de los circuncírculos de ABC y AXY. Sabemos que T está en (ABC) por *Claim 2*, y el hecho que

$$\angle XTY = \angle XOY = 60^\circ = \angle XAY$$

implica que T también está en AXY. Entonces T es el centro de rotomotecia que lleva XY a BC. Para acabar la demostración del problema, veamos que

$$\angle CBT = \angle YXT = \angle OXY = \angle DEO = \angle CEY$$

Así que las rectas BT y $EY = OY$ son paralelas. □



5. Problema 4

Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno. Sean B_1 y B_2 puntos sobre las semirrectas BC y BA tales que $BB_1 = BB_2 = AC$. Similarmente, sean C_1 y C_2 puntos sobre las semirrectas CB y CA tales que $CC_1 = CC_2 = AB$. Demuestra que si B_1B_2 y C_1C_2 intersecan en K, entonces AK es paralela a BC.

Propuesto por Roger Lidón.

Solución 1. Observa que $AB_2 = AB - BB_2 = AB - AC = CC_2 - AC = AC_2$, y por tanto AC_2B_2 es isósceles en A.

Claim. A es el circuncentro de KB_2C_2.

Proof. Como CC_1C_2 y BB_1B_2 son isósceles en C y B, respectivamente, tenemos que

$$\angle B_2KC_2 = \angle KC_1B_1 + \angle KB_1C_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCA + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle CBA = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC.$$

En particular, $\angle B_2KC_2$ es obtuso. Por tanto, sigue que

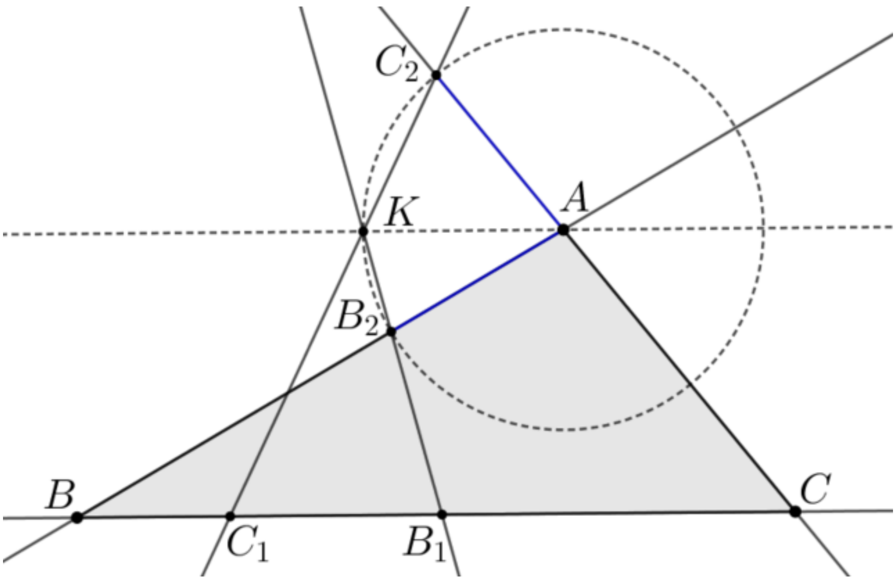
$$2 \cdot (180^\circ - \angle B_2KC_2) = 360^\circ - 2(90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC) = 180^\circ - \angle BAC = \angle C_2AB_2.$$

Como A cae dentro del ángulo $\angle B_2KC_2$, $AB_2 = AC_2$, y $\angle B_2KC_2$ es obtuso, esta última igualdad implica el claim, ya que el único punto satisfaciendo estas condiciones es el circuncentro de B_2KC_2. ■

Ahora podemos acabar. Simplemente nota que, como A es el circuncentro de B_2KC_2, entonces AKB_2 es isósceles en A, y por tanto

$$\angle AKB_2 = \angle AB_2K = \angle BB_2B_1 = \angle BB_1B_2,$$

implicando el resultado ya que K, B_2, B_1 están alineados. □



Solución 2. Como en la primera solución, nota que $AB_2 = AC_2$. Sea D el punto tal que $ACBD$ es un trapecio isósceles, es decir, la reflexión de A respecto de la mediatriz de BC. Observa que B es el circuncentro de $\triangle B_1B_2D$, y que C es el circumcentro de $\triangle C_1C_2D$.

Claim. K es el incentro de $\triangle DB_2C_2$.

Proof. Esto será sencillo de demostrar, ya que conocemos todos los ángulos involucrados en función de los ángulos α, β, γ del triángulo ABC. Denota por ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C las bisectrices del triángulo ABC. Nota que $B_2C_2 \parallel \ell_A$, que $B_1B_2 \perp \ell_B$, y que $C_1C_2 \perp \ell_C$. Por tanto,

$$\angle KB_2C_2 = 90^\circ - \angle(\ell_A, \ell_B) = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Usando que B es circumcentro de B_1B_2D, sigue que

$$\angle DB_2K = 180^\circ - \angle DB_2B_1 = \frac{1}{2}\angle DBB_1 = \frac{\gamma}{2}.$$

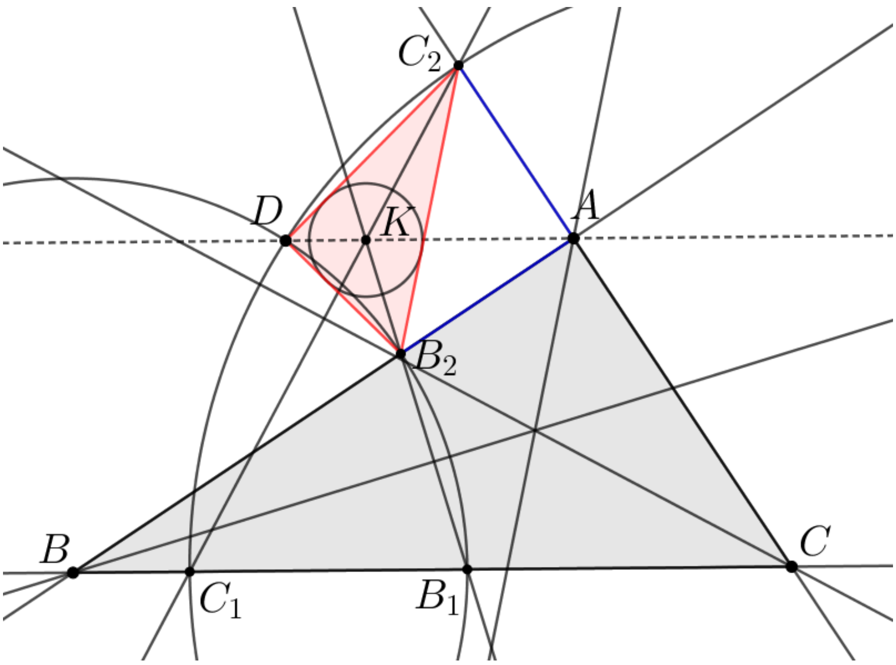
Por tanto, tenemos que $\angle DB_2K = \frac{\gamma}{2} = \angle KB_2C_2$. Similarmente se demuestra que $\angle DC_2K = \angle KC_2B_2$, demostrando el claim. ■

Ahora acabamos. Como K es el incentro de $\triangle DB_2C_2$, y $AD \parallel BC$, basta con ver que la bisectriz de $\angle B_2DC_2$ es paralela a BC. Pero, de nuevo, conocemos todos los ángulos:

$$\angle DKC_2 = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle DB_2C_2 = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$$

$$\angle BC_1C_2 = 180^\circ - \angle C_2C_1C = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Por tanto, queda demostrado que DK ess paralela a BC. □



6. Problema 5

Arándano tiene un tablero $n \times n$, donde $n \geq 1$ es entero. Arándano ha llenado el tablero usando n rectángulos de lados enteros sin solaparse, de manera que todo el tablero queda cubierto. Luego, Banana ha anotado, para cada uno de los n rectángulos, la longitud de su diagonal. Cuál es, en función de n, el valor más grande que puede tomar su suma?

Propuesto por Roger Lidón.

Solución 1. La respuesta es $n\sqrt{1+n^2}$, que se puede obtener usando n rectángulos $1 \times n$. Vemos ahora la cota. Si el rectangulo i es $a_i \times b_i$, con diagonal d_i, entonces

$$d_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \leq \sqrt{n + \frac{1}{n}}\sqrt{a_i b_i}.$$

Esta última cota se demuestra elevando al quadrado y reordenando:

$$\sqrt{a_i^2 + b_i^2} \leq \sqrt{n + \frac{1}{n}}\sqrt{a_i b_i} \iff a_i^2 + b_i^2 \leq \left(n + \frac{1}{n}\right) a_i b_i$$
$$\iff \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^2 + 1 \leq \left(n + \frac{1}{n}\right)\frac{a_i}{b_i} \iff \left(\frac{a_i}{b_i} - n\right)\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{1}{n}\right) \leq 0.$$

Esta última desigualdad sigue de que como $1 \leq a_i, b_i \leq n$, entonces $\frac{1}{n} \leq \frac{a_i}{b_i} \leq n$. Ahora consideramos la suma de todas las diagonales. Usando primero esta cota, y luego la desigualdad entre la media aritmética y la cuadrática (AM-QM), tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \leq \sqrt{n + \frac{1}{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i} \leq \sqrt{n + \frac{1}{n}} \cdot n \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i} = \sqrt{n + \frac{1}{n}} \cdot n\sqrt{n} = n\sqrt{1+n^2}.$$

Nota que hemos hecho AM-QM con variables $x_i = \sqrt{a_i b_i}$. □

Solución 2. Damos otra demostración de la cota. Supón que el i-ésimo triángulo es $a_i \times b_i$, con diagonal $d_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ y $1 \leq a_i, b_i \leq n$. Ahora acotamos

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i}\sqrt{\frac{a_i}{b_i} + \frac{b_i}{a_i}} \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i} + \frac{b_i}{a_i}\right)}$$
$$= \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i} + \frac{b_i}{a_i}\right)} \overset{\frac{1}{n} \leq \frac{a_i}{b_i} \leq n}{\leq} n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(n + \frac{1}{n}\right)} = n\sqrt{n^2+1}.$$

Hemos usado primero cauchy, y luego que si $\frac{1}{n} \leq \frac{a_i}{b_i} \leq n$, entonces

$$\frac{a_i}{b_i} + \frac{b_i}{a_i} \leq \frac{1}{n} + n.$$

Esta última cota sigue de que $f(x) = x + \frac{1}{x}$ es creciente para $x \geq 1$. También se puede demostrar reordenando

$$\frac{a_i}{b_i} + \frac{b_i}{a_i} \leq \frac{1}{n} + n \iff \left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{1}{n}\right)\left(n\frac{b_i}{a_i} - 1\right) \geq 0,$$

que es cierto ya que $\frac{1}{n} \leq \frac{a_i}{b_i} \leq n$. □

7. Problema 6

Problema 6. En Macedonia del norte hay n estaciones de tren. Hay m pares distintos de estaciones conectados por vías de tren, y sabes que se puede ir de cualquier estación a cualquier otra en tren.
Marc es el encargado de dirigir la circulación de trenes hoy. Para cada par de estaciones conectadas A y B, debe elegir entre mandar un tren de A a B o mandar un tren de B a A. Así pues, a lo largo del día, entre cada par de estaciones conectadas por una vía viajará un tren en un sentido y ninguno en el otro.
Sea N el número de formas que tiene Marc de asignar los trenes de forma que, al acabar el día, de cada estación haya partido un número par de trenes. Demuestra que N solo depende de m y n, y calcula su valor.

Propuesto por Darío Martínez.

Solución 1. Sea $G = (V, E)$ el grafo de n vértices y m aristas representando las estaciones y las vías entre ellas. Sabemos, por el enunciado, que G es conexo. En este contexto, N es el número de orientaciones del grafo tales que todos los vértices tienen outdegree par. Demostraremos que $N = 2^{m-n+1}$ si m es par, y $N = 0$ si m es impar.

Si m es impar, entonces un argumento de paridad bastará para ver que tal orientación no es posible. Por supuesto, nota que

$$m = \sum_{v \in V} \text{outdeg } v,$$

por tanto si todos los outdegrees son pares entonces m es par.

Supón ahora que m es par. Como G es connexo, debe tener un spanning tree T, es decir, un subgrafo T que es un árbol de n vértices. Supón que ya hemos orientado, de cualquiera de las 2^{m-n+1} formas que hay, las aristas de G que no son de T. La idea clave es que hay exactamente una manera de orientar T de forma que se cumpla la condición.

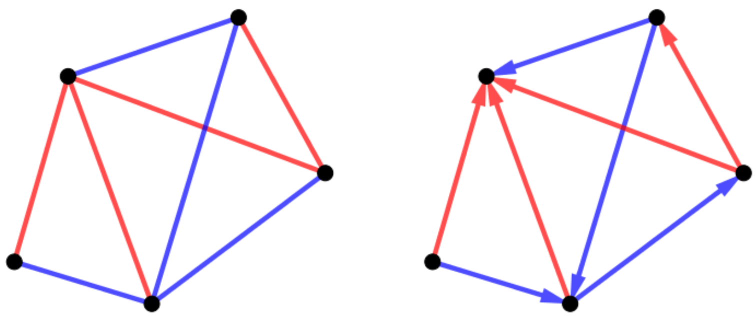


Figura 4: A la izquierda, G con T marcado rojo y el resto marcado azul. A la derecha, una orientación de todo G menos T, y la orientación correspondiente de T.

Esta observación seguirá del claim siguiente.

Claim. Sea T un árbol de n vértices. Para cada vértice v de T, tenemos un entero x_v, de forma que la suma de todos los x_v es congruente a $n+1$ módulo 2. Entonces, existe exactamente una orientación de T tal que todo vértice tiene outdegree de la misma paridad que x_v.

Proof. Usamos inducción en n eliminando una hoja de T. Sea u una hoja de T, y w su padre. Sea T' el árbol resultante de borrar u de T. Orientamos uw de forma que u tenga grado de la misma paridad que x_u. Si x_u es par, hemos orientado $w \to u$, luego ahora nos hará falta que el outdegree de w en T' sea de la misma paridad que $x'_w = x_w - 1$. Ahora se puede aplicar la hipótesis de inducción en T', ya que la condición de la suma de los x_w se sigue cumpliendo. El caso en que x_u es impar se hace analogo. ■

Si hemos orientado las aristas de G que no son de T de cualquier manera, y entonces cada vértice v tiene outdegree x_v, podemos aplicar el claim con estos mismos x_v. □

Solución 2. Describimos el problema con un grafo $G = (V, E)$ similarmente a la solución 1. Damos una demostración alternativa de que, si m es par, entonces $N = 2^{m-n+1}$.

La idea es demostrar un resultado más fuerte por inducción. Demostraremos que, si asignamos un entero x_v a cada vértice v, de forma que $\sum_{v\in V} x_v$ es par, entonces hay 2^{m-n+1} formas de orientar G de forma que outdeg $v \equiv x_v \pmod{2}$ para todo vértice v. Usamos doble inducción, primero en n y luego en m.

Caso base en n. Si $n = 1$, entonces x_v es par para el único vértice v, y por tanto hay exactamente una forma de orientar el grafo cumpliendo la condición (no hay nada que orientar).

Paso inductivo en n. Supón cierto el problema para todo grafo conexo de $n-1$ vértices. Como el grafo es conexo, $m \geq n-1$. El caso $m = n-1$ será el caso base de nuestra inducción en m. Si $m = n-1$ entonces G es un árbol. En tal caso, sea u una hoja de G, y sea w su padre. La orientación de uw está forzada por x_u. Tras orientar uw de la única forma posible, aplicamos hipótesis de inducción en el grafo G' resultante de eliminar u de G, y el caso base sigue.

Supón ahora $m > n-1$. En tal caso, existe un ciclo C en G. Sea e una arista cualquiera de C. Nota que si eliminamos e de G, nos queda un grafo G' connexo de n vértices y $m-1$ aristas. Hay dos maneras de orientar e, y para cada una de esas maneras, hay por hipótesis de inducción 2^{m-n} formas de orientar G'. Por tanto, hay $2 \cdot 2^{m-n} = 2^{m-n+1}$ formas de orientar G. La inducción está completa. □